891. D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2016). Una costruzione analitica dall'insieme dei numeri razionali all'insieme di particolari numeri reali algebrici. Un tema tipico delle "Matematiche Elementari da un punto di vista superiore", utile a riflessioni sulla Didattica della matematica. *Bollettino degli insegnanti di matematica*. [Bellinzona, Svizzera]. 72, 41-48. ISBN: 978-88-99453-01-5. (Versione bilingue, italiano e spagnolo / Versión bilingüe, italiano y español: Una construcción analítica de un subconjunto de los números reales algebraicos a partir del conjunto de los números racionales. Un tema típico de las "Matemáticas elementales desde un punto de vista superior", útil para reflexiones sobra la Didáctica de la matemática).

Una costruzione analitica dall'insieme dei numeri razionali all'insieme di particolari numeri reali algebrici.

Un tema tipico delle "Matematiche Elementari da un punto di vista superiore", utile a riflessioni sulla Didattica della matematica.

Una construcción analítica de un subconjunto de los números reales algebraicos a partir del conjunto de los números racionales.

Un tema típico de las "Matemáticas elementales desde un punto de vista superior", útil para reflexiones sobra la Didáctica de la matemática.

Bruno D'Amore[1] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

[1] PhD, Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotà, Colombia
[2] PhD, NRD, Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, Italia

Summary. In several occasions we read that the real numbers is an analytical extension of rational numbers by means of the extraction of root. In this paper we show that this affirmation is false.

Sunto. In diverse occasioni si legge che i numeri reali sono una estensione analitica dei numeri razionali ricorrendo alla operazione di estrazione di radice. In questo articolo si mostra che questa affermazione è falsa.

Resumen. En diversas ocasiones se lee que los números reales son una extensión analítica de los números racionales recurriendo a la operación de extracción de raíces. En este artículo se muestra que esta afirmación es falsa.

Versione italiana

1. Premessa

In più occasioni abbiamo sentito dire durante corsi, seminari e conferenze e letto su appunti, manuali e testi, che:
così come si estende N a Z (per poter far sì che la sottrazione sia un'operazione interna) in maniera "analitica", cioè con un opportuno passaggio al quoziente (si veda oltre),
così come si estende Z a Q (per poter far sì che la divisione sia un'operazione interna) in maniera "analitica" (si veda oltre),

si potrebbe estendere Q a R in maniera "analitica" per poter far sì che l'estrazione di radice sia un'operazione interna.
Questa affermazione è doppiamente falsa.
1. In una estensione analitica non cambia la cardinalità dall'insieme di partenza a quello esteso, mentre un ben noto teorema di Georg Cantor (1845 – 1918) mostra, usando il metodo della "diagonalizzazione",[1] che l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1 (e dunque tutto R) non è numerabile. Come risultato esteso si può affermare che $|Q|<|R|$: Q ha la potenza del numerabile, R quella del continuo.
2. D'altra parte, in R trovano posto i reali algebrici (R_A) e i reali trascendenti (R_T); un altro celebre teorema di Cantor mostra come R_A abbia a sua volta la potenza del numerabile.
Dunque, se una estensione analitica di Q è possibile, non è a tutto R.
Ricordiamo che:
D1: i numeri reali algebrici sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi;
D2: un numero reale trascendente t è caratterizzato dal fatto che non esiste alcuna equazione algebrica che abbia t come radice.[2]
Il presente lavoro si inserisce a nostro avviso nel filone delle riflessioni sulle "Matematiche elementari da un punto di vista superiore", inteso nella maniera di Felix Klein (1849 – 1925). Si veda il lavoro originale di Klein (1908-1909) e almeno qualcuna delle numerosissime interpretazioni (Enriques, 1924-27; Carruccio, 1971; Rademacher, 1983).
Tuttavia il suo interesse ci sembra investire di più il campo della Didattica della matematica, dato che in questa disciplina si è costretti a compiere analisi di tipo epistemologico. Pensiamo a campi come la formazione professionale degli insegnanti di Matematica e a ricerche legate all'apprendimento dell'infinito, affrontati da vari autori in contesto internazionale.

2. Richiami elementari sulla estensione analitica da N a Z a Q

L'idea di estensione analitica da un sistema numerico a un altro con il metodo del passaggio al quoziente è di solito attribuita a Hermann Hankel (1839 – 1873) (Enriques, 1924-27; Carruccio, 1971).

Da N a Z
Definiamo la relazione binaria $R_1 \subseteq N^2$ come segue: $\forall$ a, b, c, d $\in$ N : (a, b) R_1 (c, d) $\Leftrightarrow$ a+d = b+c.
R_1 è di equivalenza (dimostrazione banale), dunque induce in N^2 una partizione in classi che permette di definire analiticamente Z nel modo seguente: $Z = N^2/R_1$. Gli elementi di Z sono classi di equivalenza del tipo [(a, b)] che si possono scrivere, per esempio, nella notazione usuale formale a-b con la quale si evidenzia che la sottrazione è interna a Z. Si è soliti parlare di "rappresentante" di [(a, b)]: si usa scegliere la coppia (r, s) $\in$ [(a, b)] che contiene almeno uno 0. Se a=b, la classe si denomina 0; se a>b si parla di numeri interi positivi; se a<b si parla d numeri interi negativi.

Da N a Q^a (razionali assoluti)
Indichiamo con N^+ l'insieme N privato dello 0. Definiamo la relazione binaria $R_2 \subseteq N \times N^+$ come segue: $\forall$ a, c $\in$ N, b, d $\in$ N^+: (a, b) R_2 (c, d) $\Leftrightarrow$ ad=bc.
R_2 è di equivalenza (dimostrazione banale), dunque induce in $N \times N^+$ una partizione in classi che permette di definire analiticamente Q^a nel modo seguente: $Q^a = N \times N^+/R_2$. Gli elementi di Q^a sono classi di equivalenza del tipo [(a,b)] che si possono scrivere, per esempio, nella notazione usuale formale a/b (b≠0) con la quale si evidenzia che la divisione è interna a Q^a. Si è soliti parlare di

[1] Esposto la prima volta nel 1891 sulla rivista: *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*.
[2] Nel 1882, Ferdinand von Lindemann dimostrò che π è trascendente.

"rappresentante" di [(a, b)]; si usa scegliere la coppia (r, s) $\in$ [(a, b)] (s≠0) in modo tale che il MCD di r e s valga 1.

Da Z a Q
Indichiamo con Z_0 l'insieme Z privato dello zero. Definiamo la relazione R_2' $\subseteq$ $Z\times Z_0$ (in modo analogo al paragrafo precedente) come segue: $\forall$ a, c $\in$ Z, b, d $\in$ Z_0: (a, b) R_2' (c, d) $\Leftrightarrow$ ad=bc.
R_2' è di equivalenza (dimostrazione banale), dunque induce in $Z\times Z_0$ una partizione in classi che permette di definire analiticamente Q nel modo seguente: Q = $Z\times Z_0/R_2$'. Osservazioni analoghe alle precedenti andrebbero fatte sulla divisione come operazione interna a Q e sul "rappresentante".

Si noti come $|N|=|Z|=|Q^a|=|Q|$. D'altra parte una costruzione analitica non fa altro che ridistribuire con ordine diverso le infinite numerabili classi [(a, b)] a sua volta costituite da una infinità numerabile di coppie (a, b), di N e di Z, in ordine diverso.

3. Da Q all'insieme R_{AR} sottoinsieme di R_A

Seguendo questa linea analitica è possibile costruire un insieme che chiameremo insieme dei reali algebrici radicali e che indicheremo con R_{AR}, sottoinsieme dell'insieme R_A dei reali algebrici, con un procedimento del tutto analogo.

Da Q^a a R_{AR}^+ (reali algebrici radicali positivi o nulli)
Siano a, b, c, d, m, n, p, q $\in$ N, con b≠0, d≠0, m≠0, p≠0, n≥1, q≥1; poniamo: $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ R_3 $\left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) \Leftrightarrow$ $(\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{np}$.

Teorema: R_3 è di equivalenza.
Dimostrazione.
R_3 è riflessiva.
$(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ R_3 $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$; infatti: $(\frac{a}{b})^{mn} = (\frac{a}{b})^{mn}$.
R_3 è simmetrica.
$(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ R_3 $\left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) \Rightarrow \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right)$ R_3 $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$; infatti: $(\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{np} \Rightarrow (\frac{c}{d})^{np} = (\frac{a}{b})^{mq}$.
R_3 è transitiva.
$\{[(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ R_3 $\left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right)] \wedge [\left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right)$ R_3 $(\frac{e}{f}, \frac{r}{s})]\} \Rightarrow (\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ R_3 $(\frac{e}{f}, \frac{r}{s})$; infatti: $\{[(\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{pn}] \wedge [(\frac{c}{d})^{ps} = (\frac{e}{f})^{rq}]\} \Rightarrow [(\frac{a}{b})^{ms} = (\frac{e}{f})^{rn}]$, poiché:
$\{[(\frac{a}{b})^{mqs} = (\frac{c}{d})^{psn}] \wedge [(\frac{c}{d})^{pns} = (\frac{e}{f})^{nrq}]\} \Rightarrow [(\frac{a}{b})^{mqs} = (\frac{e}{f})^{rnq}]$,
da cui la tesi, con l'introduzione di numeri razionali assoluti generici e, f, r, s con f≠0, r≠0 e s≥1.
Gli elementi di R_{AR}^+ sono classi di equivalenza del tipo $[(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})]$ che si possono scrivere, per esempio, nella notazione $(\frac{a}{b})^{\frac{m}{n}}$ oppure $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^m}$.
Avendo posto n, q ≥ 1, si deve porre che la radice 1-esima sia l'identità: $\sqrt[1]{a} = a$.

Notiamo che ogni numero razionale è elemento di R_{AR}, cioè: $Q \subset R_{AR}$.
Infatti, qualsiasi razionale $\frac{h}{k}$ (h, k $\in$ Z, k≠0) è esprimibile nella forma $(\frac{h}{k})^1$.

Una banale estensione ci permette di costruire analiticamente il passaggio da Q a R_{AR} senza più alcuna restrizione; nella scrittura $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ per i numeri interi *a*, *b*, *m*, *n* si devono porre le seguenti restrizioni supplementari: $n>1$, $(\frac{a}{b})^m \geq 0$.

Quanto mostrato precedentemente ribadisce in altra forma il teorema di Cantor secondo cui R_{AR} è numerabile.

Osserviamo che ogni elemento $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^m}$ di R_{AR} è radice di un'equazione algebrica a coefficienti interi, per esempio $b^m x^n = a^m$, a conferma del fatto che $R_{AR} \subseteq R_A$.

Le operazioni razionali (addizione, sottrazione, divisione, moltiplicazione), l'elevamento a potenza, l'estrazione di radice n-esima sembrano tutte definibili in R_{AR} ma in realtà non sono interne a R_{AR}.
Per esempio, l'addizione di due numeri reali algebrici radicali non dà come somma in generale un numero reale algebrico radicale, ma un numero reale algebrico.
D'altronde tutti i numeri reali algebrici radicali sono reali algebrici.
Si ha quindi: $R_{AR} \subset R_A$.

4. Alcune note

1. $Q \subset R_{AR}$; basta porre nelle scritture precedenti: n=1.

2. $R_T \cap R_A = \varnothing$, dunque a maggior ragione: $R_T \cap R_{AR} = \varnothing$; $R_T \cup R_A = R$; $R_T \cup R_{AR} \subset R$.

3. R_{AR} è totalmente ordinato e denso.

4. Né R_{AR} né R_A sono continui, a causa, per esempio, del già citato teorema di Lindemann.

5. Si può effettuare su R_A il procedimento delle sezioni di Dedekind, usualmente effettuato su Q, riottenendo tutto R.

Conclusione

Affermare dunque che si può passare da Q a R con un ampliamento analitico introducendo l'operazione di estrazione radice è un errore; passando al quoziente ampliando Q con l'operazione di estrazione di radice, non solo non si giunge a R, il che è piuttosto intuitivo, ma non si giunge neppure a R_A che ha la stessa potenza di Q, bensì a un insieme R_{AR}, sottoinsieme stretto di R_A.

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano i colleghi professori Gianfranco Arrigo, Paolo Hägler, Paolo Negrini e Carlos Vasco U. per letture critiche e suggerimenti che hanno gentilmente e generosamente accettato di fare a versioni precedenti di questo articolo.

Riferimenti bibliografici

Carruccio, E. (1971). *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. A cura di Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora.

Enriques, F. (1924-27). *Questioni riguardanti le matematiche elementari*. Bologna: Zanichelli.

Klein, F. (1908-1909). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. (3 Bände). Leipzig: B. G. Teubner. [Berlin: Springer, 1928.

Rademacher, H. (1983). *Higher mathematics from an elementary point of view*. Edited by D. Goldfeld. With notes by G. Crane. Boston, Mass.: Birkhäuser.

Versión española

1. Premisa

En más de una ocasión hemos escuchado decir en diferentes circunstancias: cursos, seminarios o conferencias, y también lo hemos leído en notas, en manuales y en textos, que:
así como se extiende **N** a **Z** (para poder hacer que la sustracción sea una operación interna) de forma "analítica", es decir con un oportuno pasaje al «conjunto cociente» (véase más adelante), se extiende **Z** a **Q** (para poder hacer que la división sea una operación interna) de forma analítica" (véase más adelante), y que se puede extender igualmente **Q** a **R** de forma "analítica" para que la extracción de la raíz sea una operación interna.
Esta afirmación es doblemente falsa.
1. En una extensión analítica no cambia la cardinalidad del conjunto. Dado que un conocido teorema de Georg Cantor (1845 – 1918) muestra, usando el método de la "diagonalización",[3] que el conjunto de los reales comprendido entre 0 y 1 (por tanto todo **R**) no es numerable, se puede afirmar que $|\mathbf{Q}|<|\mathbf{R}|$ (**Q** tiene la misma potencia que N, **R** la del continuo).
2. Por otra parte, R contiene los reales algébricos ($\mathbf{R}_A$) y los reales trascendentes ($\mathbf{R}_T$); otro famosos teorema de Cantor muestra que $\mathbf{R}_A$ es numerable. Por tanto, sí una extensión analítica de **Q** es posible, no es a todo **R**.
Recordemos que:
D1: los números reales algébricos son raíces de ecuaciones algébricas con coeficientes enteros;
D2: un número real trascendente t se caracteriza por el hecho de que no existe ninguna ecuación algébrica que le tenga como raíz.[4]
El presente trabajo se inserta, en nuestra opinión, en la línea de las reflexiones sobre las "Matemáticas elementales desde un punto de vista superior", entendido a la manera de Félix Klein (1849 – 1925). Véase el trabajo original de Klein (1908 – 1909) o al menos una de sus numerosas interpretaciones (Enriques, 1924-27; Carruccio, 1971; Rademacher, 1983).
Sin embargo, el interés del trabajo está centrado en el campo de la Didáctica de la matemática, dado que en esta disciplina estamos obligados a hacer, entre otros, análisis de tipo epistemológico. Pensemos, por ejemplo, en campos como la formación profesional de los docentes de Matemática y en las investigaciones relacionadas con el aprendizaje del infinito, aspectos afrontados por varios autores en el contexto internacional.

[3] Expuesto por primera vez en 1891 en la revista: *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*.
[4] En 1882, Ferdinand von Lindemann demostró que π es trascendente.

2. Reflexiones elementales sobre la extensión analítica de N a Z y de N a Q

La idea de extensión analítica de un sistema numérico a otro por el método del paso al conjunto cociente se atribuye a Hermann Hankel (1839 – 1873) (Enriques, 1924-27; Carruccio, 1971).

De N a Z

Definimos la relación binaria $R_1 \subseteq N \times N$ como sigue: $\forall$ a, b, c, d $\in$ N: (a, b) R_1 (c, d) $\Leftrightarrow$ a+d = b+c.
R_1 es de equivalencia (demostración banal), por tanto induce en N^2 una partición en clases que permite definir analíticamente Z de la siguiente forma: $Z = N^2/R_1$. Los elementos de Z son clases de equivalencia del tipo [(a, b)] que se pueden escribir, por ejemplo, en la notación usual a-b, con la cual se evidencia que la sustracción es interna a Z. Por lo general, se habla de "representante" de [(a, b)] y usualmente se elige el par (r, s) $\in$ [(a, b)] que contiene al menos un 0. Si a=b, la clase se denomina 0; si a>b se habla de números enteros positivos; si a<b se habla de números enteros negativos.

Da N a Q^a (racionales absolutos)

Indicamos con N^+ el conjunto N sin el 0. Definimos la relación binaria $R_2 \subseteq N \times N^+$ como sigue: $\forall$ a, c $\in$ N, b, d $\in$ N^+: (a, b) R_2 (c, d) $\Leftrightarrow$ ad=bc.
R_2 es de equivalencia (demostración banal), por lo tanto induce en $N \times N^+$ una partición en clases que permite definir analíticamente Q^a de la siguiente manera: $Q^a = N \times N^+/R_2$. Los elementos de Q^a son clases de equivalencia del tipo [(a, b)] que se pueden escribir, por ejemplo, en la notación usual formal a/b (b≠0), con la cual se evidencia que la división es interna a Q^a. Por lo general, se habla de "representante" de [(a, b)] y usualmente se elige el par (r, s) $\in$ [(a, b)] (s≠0) de forma tal que el MCD de r y s sea 1.

Indicamos con Z_0 el conjunto Z sin el cero. Definimos la relación $R_2' \subseteq Z \times Z_0$ (de forma análoga al parágrafo precedente) como sigue: $\forall$ a, c $\in$ Z, b, d $\in$ Z_0: (a, b) R_2' (c, d) $\Leftrightarrow$ ad=bc.
R_2' es de equivalencia (demostración banal), por lo tanto se induce en $Z \times Z_0$ una partición en clases que permite definir analíticamente Q de la siguiente manera: $Q = Z \times Z_0/R_2'$. Observaciones análogas a las precedentes deberían hacerse sobre la división como operación interna en Q y sobre el "representante".

Nótese que $|N| = |Z| = |Q^a| = |Q|$. Por otra parte una construcción analítica no hace otra cosa que redistribuir con orden diverso las infinitas clases numerables [(a, b)], a su vez constituidas por infinitos pares numerables (a, b), de N y de Z, en diverso orden.

3. De Q al conjunto R_{AR} subconjunto de R_A

Siguiendo esta línea analítica es posible construir un conjunto que llamaremos conjunto de los reales algébricos radicales y que indicaremos con R_{AR}, subconjunto del conjunto R_A de los reales algébricos, con un procedimiento del todo análogo.

De Q^a a R_{AR}^+ (reales algébricos radicales positivos o nulos)

Sean a, b, c, d, m, n, p, q $\in$ N, con b≠0, d≠0, m≠0, p≠0, n≥1, q≥1; establecemos: $\left(\frac{a}{b},\frac{m}{n}\right) R_3 \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right)$ $\Leftrightarrow (\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{np}$.

Teorema: R_3 es de equivalencia.
Demostración.

R_3 es reflexiva.
$(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ R_3 $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$; de hecho: $(\frac{a}{b})^{mn} = (\frac{a}{b})^{mn}$.
R_3 es simétrica.
$(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ R_3 $\left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right) \Rightarrow \left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right)$ R_3 $(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$; de hecho: $(\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{np} \Rightarrow (\frac{c}{d})^{np} = (\frac{a}{b})^{mq}$.
R_3 es transitiva.
$\{[(\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ R_3 $\left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right)] \wedge [\left(\frac{c}{d}, \frac{p}{q}\right)$ R_3 $(\frac{e}{f}, \frac{r}{s})]\} \Rightarrow (\frac{a}{b}, \frac{m}{n})$ R_3 $(\frac{e}{f}, \frac{r}{s})$; de hecho: $\{[(\frac{a}{b})^{mq} = (\frac{c}{d})^{pn}] \wedge [(\frac{c}{d})^{ps} = (\frac{e}{f})^{rq}]\} \Rightarrow [(\frac{a}{b})^{ms} = (\frac{e}{f})^{rn}]$, dado que:
$\{[(\frac{a}{b})^{mqs} = (\frac{c}{d})^{psn}] \wedge [(\frac{c}{d})^{pns} = (\frac{e}{f})^{nrq}]\} \Rightarrow [(\frac{a}{b})^{mqs} = (\frac{e}{f})^{rnq}]$,
de donde la tesis, con la introducción de números racionales absolutos genérico e, f, r, s con f≠0, r≠0 e s≥1.

Los elementos de R_{AR}^+ son clases de equivalencia del tipo $\left[\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{n}\right)\right]$ que se pueden escribir, por ejemplo, con la notación $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$ o también $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$

Teniendo fijado n, q ≥1, se debe establecer que la raíz 1-ésima sea la identidad $\sqrt[1]{a} = a$.

Notemos que cada número racional es elemento de R_{AR}, es decir: $Q \subset R_{AR}$.
De hecho, todo racional $\frac{h}{k}$ (h, k ∈ Z, k≠0) se puede expresar de la forma $\left(\frac{h}{k}\right)^1$.

Una banal extensión nos permite construir analíticamente el pasaje de Q a R_{AR} sin ninguna restricción; en la escritura $\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{n}\right)$ para los números a, b, m, n se deben dar las siguientes restricciones suplementarias: n>1, $\left(\frac{a}{b}\right)^m \geq 0$.
Lo demostrado anteriormente refuerza de otra forma el teorema de Cantor, según el cual R_{AR} es numerable.

Observamos que cada elemento $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ de R_{AR} es raíz de una ecuación algébrica con coeficientes enteros, por ejemplo $b^m x^n = a^m$, confirmando que $R_{AR} \subseteq R_A$.

Las operaciones racionales (adición, sustracción, división, multiplicación), la elevación a potencia, y la extracción de raíz n-ésima parecen todas definibles en R_{AR} pero en realidad no son internas a este conjunto. Por ejemplo, la adición de dos números reales algébricos radicales no da como suma, en general, un número real algébrico radical, sino un número real algébrico.
Se tiene entonces: $R_{AR} \subset R_A$.

4. Algunas notas

1. $Q \subset R_{AR}$; basta poner en la escritura precedente: n=1
2. $R_T \cap R_A = \varnothing$, por lo tanto con mayor razón: $R_T \cap R_{AR} = \varnothing$; $R_T \cup R_A = R$; $R_T \cup R_{AR} \subset R$.
3. R_{AR} es totalmente ordenado y denso.
4.Ni R_{AR} ni R_A son continuos, a causa, por ejemplo, del ya citado teorema de Lindemann.
5. Se puede efectuar en R_A el procedimiento de las cortaduras de Dedekind, usualmente efectuado en Q, re-obteniendo todo R.

Conclusión

Afirmar que se puede pasar de Q a R con una ampliación analítica introduciendo la operación de extracción de raíz es un error. Al pasar al conjunto cociente ampliando Q con la operación de extracción de raíz, no sólo no se obtiene R, lo que es por demás intuitivo, sino que ni tan solo se llega a R_A , que tiene la misma potencia que Q, sino a un conjunto R_{AR}, subconjunto proprio de R_A.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los colegas profesores Gianfranco Arrigo, Paolo Hägler, Vicenç Font Moll, Paolo Negrini e Carlos Vasco U. por la lectura crítica y sugerencias que gentil y generosamente aceptaron hacer a versiones precedentes de este artículo.

Referencias bibliográficas

Carruccio, E. (1971). *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. Compilado por D'Amore. Bologna: Pitagora.

Enriques, F. (1924-27). *Questioni riguardanti le matematiche elementari*. Bologna: Zanichelli.

Klein, F. (1908-1909). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. (3 Bände). Leipzig: B. G. Teubner. [Berlín: Springer, 1928.

Rademacher, H. (1983). *Higher mathematics from an elementary point of view*. Compilado por D. Goldfeld. Con notas de G. Crane. Bostón, Mass.: Birkhäuser.